Konceptualinė pažanga moksle: momentinių dydžių panaudojimas gamtotyroje

Edmundas Adomonis

Kultūros, filosofijos ir meno institutas, Saltoniškių g. 58, LT-2600 Vilnius, edmundasad@takas.lt

Šiame straipsnyje aptariamas vienas iš mokslinės pažangos aspektų, būtent konceptualinių priemonių pažangos atvejis, susijęs su momentinių dydžių skaičiavimo (infinitezimalinio skaičiavimo) įvedimu aprašant netolygų kitimą. Parodomas šio konceptualinio žingsnio vaisingumas bei aptariami keli svarbūs mokslo istorijos epizodai, vedę prie naujojo skaičiavimo: daugiausia dėmesio skiriama Mertono koledžo filosofų ir Oresme'o naujovėms bei Newtono darbams, kuriuose jau sistemingai taikomas naujasis skaičiavimas. Be to, pabrėžiamas grafinių reprezentavimo priemonių efektyvumas gamtotyroje.

Raktažodžiai: momentiniai dydžiai, momentinis greitis, konceptualinė pažanga, Newtonas

1. Šio straipsnio tikslas yra parodyti vaisingų konceptualinių priemonių svarbą gamtotyroje, būtent šiuo atveju nagrinėjamos matematinės priemonės, įgalinančios panaudoti momentinius dydžius, bei jų atsiradimas mokslo istorijoje. Tokios matematinės priemonės bendrai bus vadinamos infinitezimaliniu skaičiavimu, siekiant aprėpti tiek šiuolaikinį jo variantą – nykstamųjų skaičiavimą (t. y. diferencialinį ir integralinį skaičiavimą), tiek anksčiau naudotą „be galo mažų dydžių“ skaičiavimą, kai dar nebuvo aiškiai suformuluota perėjimo prie ribos samprata. Paprastumo dėlei pagrindinės idėjos daugiausia aiškinamos momentinio greičio pavyzdžiu.

Darbo planas yra toks: pirmiausia aptariama momentinių dydžių idėja, o po to apžvelgiamos konceptualinės naujovės (tarp jų ir grafinės priemonės) momentinių dydžių įvedimo istorijoje daugiausia dėmesio skiriant XIV a. scholastų idėjoms ir ypač Newtono XVII a. įvestoms infinitezimalinėms priemonėms. Būtina pabrėžti, kad analizė pateikiama ne matematikos istorijos, o gamtotyros istorijos požiūriu, t. y. matematinių priemonių taikymo aspektu.

Infinitezimalinio skaičiavimo įvedimas reprezentuoja konceptualinės pažangos aspektą mokslo istorijoje. Konceptualinę pažangą moksle bendrai galima apibūdinti kaip mokslo konceptualinių priemonių pakeitimus, įgalinančius geriau siekti episteminių mokslo tikslų. Tokia bendra samprata trivialiai aprėpia ir atvejus, kai mokslo kalba pakinta reikšmingų atradimų dėka. Pvz., taip atsitiko XVIII a. chemijoje atmetus terminą „flogistonas“ bei ėmus vartoti terminą „deguonis“. Tačiau į konceptualinės pažangos aspektą daug svarbiau atkreipti dėmesį tais atvejais, kai pačios konceptualinių priemonių naujovės skatina atradimus. Kaip tik toks yra infinitezimalinio skaičiavimo vaidmuo XVII a. mechanikoje, pagrindinei to meto mokslo revoliucijos disciplinai.

2. Galima pamanyti, kad terminas „greitis“ yra gana trivialus. Bet iš tikrųjų taip nėra: su juo yra susiję keletas subtilių idėjų, kurios veda prie universalių priemonių netolygaus kitimo analizei. Pradėkime nuo pavyzdžio iš garsiųjų Feynmano fizikos paskaitų [7: 8–3]. Feynmanas ironiškai pasiūlo vien algebrinėmis priemonėmis išspręsti tokį uždavinį: baliono tūris auga 100 cm^3 per sekundę greičiu; reikia rasti spindulio didėjimo greitį, kai tūris yra 1000 cm^3. Tolygaus judėjimo samprata leidžia susidoroti su pastoviu tūrio augimo greičiu: nesunku matyti, kad 1000 cm^3 tūrį balionas pasieks po 10 sekundžių. Tačiau spindulio greičio problema yra daug sudėtingesnė: uždavinys reikalauja rasti momentinį greitį, spinduliui netolygiai kintant, t. y. jo greičiui kiekvienu momentu vis esant kitokiam. Kaip gauti priemones, leidžiančias manipuliuoti momentiniais dydžiais, pavyzdžiui, šiuo atveju surasti spindulio greitį po 10 sekundžių?

Gali pasirodyti, kad priskirti greitį laiko momentui nėra jokio reikalo – galų gale laiko momento „viduje“ kūnas nejuda. Tad galbūt greitį reikėtų priskirti laiko intervalui, pvz., vieną sekundę kūnas turėjo 2 m/s greitį, po to 1/10 sekundės jo greitis buvo 3 m/s ir t. t. Tačiau tokia taktika visiškai netinka, kai greitis tolydžiai kinta, t. y. koks bebūtų mažas laiko intervalas, greitis jo metu nėra pastovus kaip kad yra praeitos pastraipos uždavinyje. Toks pat yra ir klasikinis kinematinis dėsningumas – laisvai krintančio kūno tuštumoje kelio priklausomybė nuo laiko: paprasčiausiu atveju be pradinio greičio $s = (1/2)gt^2$, o $v = gt$ (čia *g* – laisvo kritimo greičio konstanta). Kaip matyti, čia kiekvienam t yra vis kitoks greitis. Prieš analizuojant šį atvejį, naudinga įvesti vidutinio greičio idėją.

Vidutinis greitis yra kaip tik tas greitis, kuris priskiriamas laiko intervalui, t. y. imamas laiko intervalas ir nesvarbu, kaip bekistų greitis intervalo viduje, nueitas kelias padalijamas iš laiko. Tolydaus kitimo atveju kiekvienam laiko intervalui gaunamas vis kitas vidutinis greitis. Vidutinis greitis – tai ta idėja, kuri leidžia susieti lengvai aprašomą tolygų judėjimą su komplikuotu netolygiu judėjimu. Tarkim, kad ieškome laisvai krintančio kūno momentinį greitį po 5 sekundžių kritimo. Pažvelkime, kas vyksta 5 sekundžių artimiausioje aplinkoje: per 5 s kūnas nukrito 125 m (paprastumo dėlei g tegu būna 10 m/s²), per 6 s – 180 m, tad tarp penktos ir šeštos sekundės nukrito 55 m, vidutinis greitis 55 m/s. Tokiu būdu skaičiuojant vis mažesniais laiko intervalais, einančiais po 5 s, gauname tokius rezultatus (čia Δt – laikas sekundėmis lygus t – 5 s, Δs – kelias metrais lygus $s(t) - s(5) = s(t) - 125$ m, v – vidutinis greitis atitinkamame laiko intervale):

Δt	Δs	$v = \Delta s/\Delta t$
1 s	55 m	55 m/s
0,1 s	5,05 m	50,5 m/s
0,01 s	0,5005 m	50,05 m/s
0,001 s	0,050005 m	50,005 m/s
0,0001 s	0,00500005 m	50,0005 m/s

Nesunku pastebėti skaitinį dėsningumą paskutiniame stulpelyje, kuris leistų pratęsti lentelę kiek norima toli: kuo mažesnis laiko tarpas, tuo vidutinis greitis yra arčiau 50 m/s. Šis ribinis skaičius 50 m/s ir yra laiko momentui 5 s priskiriamas momentinis greitis. Taigi, kaip matyti, momentinis greitis atspindi tai, kas vyksta vis mažėjančioje laiko momento aplinkoje. Čia pailiustravome fundamentalią perėjimo prie ribos idėją. Griežtai kalbant betgi, pateiktos lentelės nepakanka – juk ribinis perėjimas apima begalinį žingsnių skaičių. Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas pateikia universalias priemones, kaip baigtinėmis išraiškomis susidoroti su šiuo begaliniu procesu. Čia momentinis greitis – tai kelio ir laiko santykio riba, kai Δt artėja prie nulio: $v = \lim \Delta s/\Delta t$, kai $\Delta t \to 0$ arba $v = ds/dt$.

Panaudojant šias idėjas, nesunku įvesti ir kitus momentinius dydžius. Štai kita fundamentali kinematikos sąvoka – pagreitis: kaip greitis yra kelio pokytis per laiko vienetą, taip pagreitis yra greičio pokytis per laiko vienetą; momentinis pagreitis – dv/dt. Momentiniai dydžiai tinka ne tik judėjimo, bet ir bet kuriai kiekybinei kitimo analizei: jei N – medžiagos kiekis, tai dN/dt – medžiagos kitimo (didėjimo ar mažėjimo) sparta. Momentiniai dydžiai naudojami ne tik gamtos moksluose. Antai ekonomikoje vadinamieji ribiniai dydžiai yra išvestinės funkcijos, pvz., ribinis vienos prekės (x_1) naudingumas kitos (x_2) atžvilgiu yra naudingumo funkcijos (U) dalinė išvestinė pagal x_1: $\partial U(x_1, x_2)/\partial x_1$. Šis dydis rodo, kaip greitai kinta naudingumas taške, kai pirmos prekės kiekis pasikeičia pakankamai mažu dydžiu (o tiksliau, artėjančiu į nulį dydžiu), antrosios prekės kiekiui nesikeičiant.

Ką duoda momentinių dydžių įvedimas? Jie suteikia galimybę aprašyti netolygių procesų dėsningumus diferencialinėmis lygtimis. Diferencialinėse lygtyse tarp kitų dydžių pasirodo ir momentiniai. Išsprendus tokią lygtį, galima numatyti proceso eigą taškas po taško norimu tikslumu. Pvz., jei N – radioaktyviosios medžiagos branduolių skaičius, tai galioja dėsningumas: $dN/dt = -\lambda N$ (momentinis skilimo greitis proporcingas medžiagos kiekiui tuo metu). Planetų judėjimą taip pat aprašo diferencialinės lygtys [7: 9–4 – 9–9].

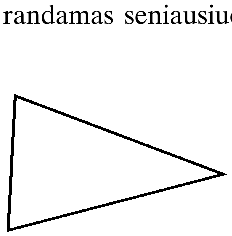
3. Pereinant prie konceptualinės istorijos, vieni pirmųjų kinematikos žingsnių perkelia mus į Mertono koledžą Oksforde, kur XIV a. pirmojoje pusėje dirbo keturi išradingi mokslininkai: Thomas Bradwardine, William Heytesbury, John Dumbleton ir Richard Swineshead. Jie kūrė kinematinį žodyną, kuris jau XIV a. antrojoje pusėje paplito Europoje ir kuriuo rėmėsi Galilėjus. Buvo iškelta tolygiai greitėjančio (lėtėjančio) judėjimo idėja – tai toks judėjimas, kai per bet kurį vienodą laiko intervalą greičio pokytis yra vienodas. Mertono scholastai taip pat, kiek žinoma, pirmieji suformulavo vidutinio greičio teoremą: nueito atstumo požiūriu tolygiai greitėjantis judėjimas yra lygus tolygiam judėjimui tokiu greičiu, kurį turėjo greitėjantis judėjimas viduriniu judėjimo momentu.

Mūsų požiūriu įdomiausia būtų Mertone pasirodžiusi momentinio greičio idėja. Buvo skiriama judėjimo kiekybė kaip visuminis greitis, apibūdinamas nueitu atstumu per tam tikrą laiką, ir judėjimo kokybė (intensyvumas) kaip greitis, nepriklausantis nuo trukmės, t. y. momentinis greitis. Heytesbury paaiškina, kad momentinis greitis yra nustatomas ne nueitu keliu, bet tuo atstumu, kurį taškas per tam tikrą laiką **nueitų**, **jei** jis tolygiai **judėtų** tuo greičio laipsniu, kurį turėjo duotuoju momentu [2: 236]. Dijksterhuis tvirtina, kad tai akivaizdus *circulus in definiendo*, nors čia pat pažymi, jog nei Kepleris, nei Galilėjus negalėjo pasiūlyti nieko geresnio, net šiuolaikiniai įvadiniai fizikos vadovėliai tai naudoja – mat vienintelis tikslus būdas įvesti momentinį dydį yra diferencialinis ir integralinis skaičiavimas [4: 193].

Iš tikrųjų, Heytesbury apibrėžimo apibrėžiančiojoje dalyje pasirodo momentinis greičio laipsnis, o kaip tik tai ir yra apibrėžiamasis terminas. Tačiau apibrėžime slypi visos prielaidos korektiškam apibrėžimui, kuris būtų toks: momentinis greitis yra nustatomas tuo atstumu, kurį taškas per tam tikrą laiką **nueitų**, **jei** jis tolygiai **pradėtų judėti** nuo duotojo momento. Šitaip išvengiama *circulus in definiendo*: apibrėžiančiojoje dalyje kalbama tik apie tolygų judėjimą, kuris jau prieš tai buvo apibrėžtas tiek Heytesbury, tiek šiuolaikiniu požiūriu.

Galima būtų suabejoti, ar turi šiuo metu kokią nors vertę tokie momentinių dydžių paaiškinimai tolygaus judėjimo terminais – juk turime tikslius formalius apibrėžimus kaip šiuo atveju *ds*/*dt*. Bet pirma, toks pagrindimas neišvengiamas motyvuojant ribinį perėjimą formaliuose apibrėžimuose bei aiškinant jų taikymą, pvz., pasitelkiant skaitinius metodus neįveikiamoms lygtims spręsti. Be to, pedagoginiu požiūriu vargu ar galima tikėtis, kad besimokantis sugebės suprasti, kodėl fizikai manipuliuoja diferencialais kaip baigtiniais dydžiais sakydami, kad esant nykstamai mažam laiko intervalui (anksčiau buvo kalbama apie be galo mažus intervalus) galioja, pvz., ds = vdt. Ši lygybė tiesiogiai seka iš šiuolaikinio diferencialo apibrėžimo, tačiau motyvuojant, kodėl šis apibrėžimas tinka gamtos aprašymui, tenka pasitelkti tokį komentarą *à la* Heytesbury (ištrauka iš 1914 m. išleistos enciklopedijos): „Tirdami išmesto į orą kamuolio judėjimą, mes nagrinėjame be galo mažus laiko intervalus *dt* tam, kad mąstytume apie šį judėjimą kaip tolygų… mes galime apibrėžti diferencialą arba atstumą *dl* kaip atstumą, kurį kamuolys *nueitų* per bet kokį pasirinktą baigtinį laiko intervalą *dt* pradedant duotu momentu, jei tuo momentu judėjimas taptų tolygiu. Tokiu būdu galime išvengti galvojimo apie be galo mažus dydžius“ [2: 214–215]. Kaip matyti, čia „atsižvelgta“ į ankstesnės pastraipos pataisymą.

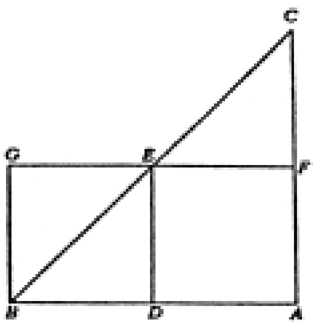
4. Prieš tęsiant norėčiau pabrėžti grafinių priemonių svarbą pažinime. Štai paprastas paveiksliukas – trikampis, kuris randamas seniausiuose Egipto papirusuose:



Tokiu piešiniu galima reprezentuoti paviršinius objektus, kaip antai žemės sklypus. Svarbiausia yra tai, kad tirdami šią reprezentaciją, galime išsiaiškinti trikampio sklypo savybę – plotą. Aišku, kad kuo geriau figūra reprezentuoja sklypą, tuo tikslesni bus tyrimo rezultatai. Babiloniečių dantiraščiuose randame žemės sklypų padalijimo schemą: tai netaisyklinga daugiakampė figūra, padalyta į trikampius ir stačiakampius su šalia nurodytu plotu [10: 238]. Tokia grafinė priemonė įgalina ne tik lengvai padalyti sklypus, bet ir surasti visuminio sklypo plotą.

Paviršinis objektas ir jo geometrinė reprezentacija turi nesunkiai pastebimo panašumo. Bet kaip panaudoti grafines priemones tiriant dinaminį objektą – judėjimą? Paprasčiausias būdas yra įvesti geometrines priemones trajektorijai pavaizduoti. Tokia reprezentacija reikalauja daugiau išradingumo: kūnas juda iš vietos į vietą, o šis procesas vaizduojamas statiniu paveikslėliu – linija. Jau graikų matematikų darbuose pastebimas geometrinių pavidalų siejimas su judėjimu. Antai Archimedas spiralę apibrėžia judėjimų kompozicijos būdu: jei tiesi linija plokštumoje pastoviu greičiu sukasi apie savo fiksuotą galą ir jei tuo pačiu metu taškas pastoviu greičiu juda šia tiesia linija tolyn nuo fiksuoto galo, tai šis taškas nubrėžia spiralę plokštumoje [1: 490]. Apolonijus kalba apie taško, tenkinančio tam tikrus apribojimus, geometrinę vietą (locus) – tai jau koordinatinio metodo užuomazgos, nes geometrinė figūra apibrėžiama per būdingų atkarpų sąryšį. Būdamas ne tik geometras, bet ir astronomas, Apolonijus įvedė epiciklus bandydamas „išgelbėti“ pastebimą dangaus šviesulių netvarką kelių tolygių apskritiminių judėjimų kompozicijos dėka. Šią techniką toliau ištobulino Hiparchas ir Ptolomėjus. Tuo būdu trajektorijų brėžiniai bei jų geometrinė analizė tapo neatsiejama matematinės astronomijos dalimi. Tačiau koordinatinis metodas tapo efektyviu įrankiu tik po to, kai Fermat ir Descartesas geometrinėms problemoms pritaikė išplėtotą XVII a. algebrą, t. y. kai lygtis tapo geometrinio pavidalo reprezentacija.

Mertono idėjos pasidaro aiškesnės, kai atsižvelgiama į naujas grafines priemones – geometrinių figūrų panaudojimą aprašant kokybes, tarp jų ir judėjimo kokybę. Tokį patobulinimą Mertono kinematikai pritaikė Giovani di Casali ir Nicole Oresme XIV a. viduryje. Pagrindinė Oresme'o [2: 331–381] idėja buvo tai, kad linijinės kokybės ekstensija reprezentuojama horizontalia atkarpa (longitudo), kokybės intensyvumas – vertikalia atkarpa (latitudo), statmenai nuleistai į atitinkamą horizontalės tašką. Diagramos mastelis gali būti laisvai pasirinktas, bet proporcijos tarp intensyvumų atitinka proporcijas tarp jas reprezentuojančių vertikalių linijų. Tada linijinės kokybės kiekybę reprezentuoja plokščia figūra, t. y. vertikalių visuma. Tuo būdu tolygią (uniformiter) kokybę atitinka stačiakampis, o tolygiai kintančią (uniformiter difformis) – trikampis arba trapecija. Visa tai tinka ir judėjimo atvejui: tada ekstensijos linija reprezentuoja laiką, o intensyvumo linija – greitį atitinkamu momentu. Svarbu tai, kad Oresme išskiria vertikalės viršutinių taškų liniją (pvz., GF ir BC, žr. 1 pav.) vadindamas ją intensijos linija arba viršutine linija. Tuo artėjama prie šiuolaikinio kreivių grafikuose supratimo. Tokiu būdu gaunamas geometrinis Mertono vidutinio greičio teoremos variantas (čia dalinis atvejis, kai trikampyje taške B yra nulinis intensyvumas):



1 pav.

Tolygiai kintanti kokybė yra lygi tolygiai kokybei, kurios intensyvumas atitinka vidurinį tašką. Oresme tai įrodo bendruoju atveju: iš brėžinio aišku, kad trikampis BAC ir stačiakampis AFGB yra lygūs, o tada yra lygios ir jų reprezentuojamos kokybės. Tai tinka ir greičiui – tik reikia kalbėti apie laiką ir greitį viduriniu laiko momentu. Nors įrodyme Oresme nesako, kad nueitą kelią atitinka figūra (ar jos plotas), bet tolesniame dėstyme jis aiškiai skaičiuoja figūros plotą, kuris reprezentuoja visuminį greitį arba atstumą [2: 6.1 III.7–III.8].

Ką duoda šis konceptualinis žingsnis? Kalbėdamas bendrai, V. A. Lefevras tvirtina, kad „Oresme „sustabdė judėjimą“ pakeisdamas betarpišką judėjimo pergyvenimą darbu su statišku paveikslėliu, kuris pats nejuda, bet pateikia jo atvaizdą... taigi su judėjimu galima elgtis kaip su daiktu ir tuo būdu taikyti analitinius metodus“ [14: 27]. Taigi turime judėjimą reprezentuojančią priemonę, kurią analizuodami tiriame patį judėjimą. Tokių „sustabdytų paveikslėlių“ jau buvo antikoje, pvz., jau minėti trajektoriniai matematinės astronomijos apskritimai. Bet Oresme žengia žingsnį į priekį ir grafiškai pavaizduoja funkcinį laiko ir greičio sąryšį. Tolygaus judėjimo atveju toks reprezentavimas neatneša didelės naudos. Tačiau neturint analitinių momentinius dydžius apdorojančių priemonių, jis leidžia susidoroti su tolygiu kintamumu: kaip šiuo atveju įvertinti tolygų ir tolygiai kintantį judėjimą atstumo aspektu. Net ir šiuo metu turint efektyvų analitinį aparatą, funkcinių sąryšių grafikai yra visuotinai naudojami gamtos ir socialiniuose moksluose.

Oresme puikiai suvokė bendrus grafinių reprezentacijų taikymo bruožus. Jis pats pateikia geometrinių reprezentacijų naudojimo precedentus: optikai tai naudoję spindulių pavaizdavimui, Aristotelis „Fizikoje“ laiko intervalų pavaizdavimui; be to, Euklido komentatorius Campanus teigęs, kad bet ką, turintį kontinuumo prigimtį, galima įsivaizduoti linija, paviršiumi ar kūnu. Galėtume pridurti, kad terminai platuma (latitudo) ir ilguma (longitudo) bent nuo Ptolomėjaus laikų priklausė geografų ir astronomų žodynui panaudojant sferines koordinates. Pagrįsdamas Oresme teigia, kad kiekvienas matuojamas daiktas yra (įsi)vaizduojamas (ymaginatur) tolydžios kiekybės būdu. Intensyvumą (intensio) bei ekstensiją (extensio) kaip be galo dalų kontinuumą taip pat galima patogiai reprezentuoti linijomis (ar paviršiais). Kaip tik linijose ir paviršiuose matas (proporcijos) yra pirmine prasme ir todėl proporcijų tyrimas juose yra daug lengvesnis. O kadangi intensyvumai yra proporcingi reprezentuojančioms linijoms, tai pastarųjų tyrimas leidžia pažinti pačius intensyvumus. Oresme perspėja, kad intensyvumą vaizduojanti linija – tai linija mūsų vaizduotėje (secundum ymaginationem), o ne realiai pačiame daikte (secundum rem) besitęsianti linija; atitinkamai savo brėžinius jis vadina „ymaginationes“ [2: 6.1 I.1].

Toks bendras pagrindimas tiktų ir kalbant apie šiuolaikinį grafinių priemonių naudojimą. Pirma, iš tikrųjų reprezentavimas – nebūtinai „paveikslavimas“, todėl nereikia, kaip perspėja Oresme, ieškoti vizualiai reprezentaciją atitinkančio objekto. Kaip antai visi besimokantys turi suprasti, kad potencinės duobės Žemės gravitaciniame lauke grafikas, vizualiai panašus į duobę, reprezentuoja potencinės energijos priklausomybę nuo atstumo iki centro, o ne realią duobę. Reprezentacijos būdas įvaldomas išmokstant reprezentacijos taisykles.

Antra, (apie tai pats Oresme nekalba) faktinis brėžinys popieriuje nebūtinai turi išlaikyti proporcijas, kurios jam kaip reprezentacijai priskiriamos. Antai XV a. Oresme traktato rankraštyje [2: 344] pateiktas vidutinio greičio teoremos brėžinys, kuriame atkarpos CF ir BG nėra lygios. Bet faktiškai įrodinėjant tariama, kad jos lygios: mat įrodymas remiasi ne tik brėžiniu, bet ir tuo, kas sąlygose eksplicitiškai nurodoma, t. y. grafines reprezentacijas valdančios taisyklės (jų prasmė) apima ir brėžinio analitinį komentarą.

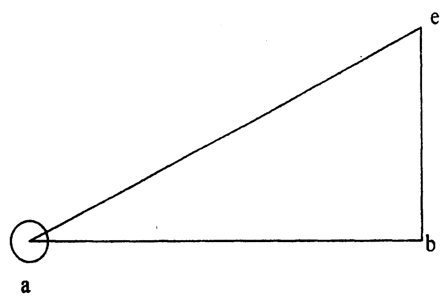
Trečia, grafinės reprezentacijos tyrimas atskleidžia tiriamojo objekto bruožus. Bendrai kalbant, tai tinka ne tik linijų proporcingumo aspektu, bet ir sudėtingesniais atvejais, kurie skirtingoms reprezentacijoms yra skirtingi. Pvz., bet kurio dydžio kitimo momentinę spartą grafike reprezentuoja liestinė tame taške, arba, tiksliau, liestinės kampas su X ašimi – šio kampo tangentas yra lygus momentinei spartai, t. y. $\operatorname{tg} \alpha = dy/dx$.

Nurodytos viduramžių konceptualinės naujovės tampa reikšmingos gamtotyrai, kai pastebima, kad jos tinka realiam judėjimui gamtoje, pvz., laisvai krintančių kūnų atveju. Kaip tik šio žingsnio XIV a. scholastai ir nežengė. Jų tyrimas buvo ne empirinis, o greičiau kai kurių galimo kitimo bruožų aprašymas nesistengiant juos pritaikyti realiam kitimui. Tuo jis radikaliai skiriasi nuo XVII a. tyrimų, kai remiantis empiriniu pagrindu buvo aprašomas judėjimas gamtoje. Tai puikiai išreiškė Galilėjus, kuris sau kėlė tikslą rasti vaisingus apibrėžimus, t. y. „geriausiai tinkančius gamtos reiškiniams“: „bet kas gali išrasti kokią susimanytų judėjimo rūšį ir aptarti jos savybes... bet mes nusprendėme aptarti su pagreičiu krintančių kūnų reiškinius taip kaip jie realiai vyksta gamtoje ir sudaryti tokį greitėjančio judėjimo apibrėžimą, kad jis parodytų esminius stebimų greitėjančių judėjimų bruožus“ [9: 200]. Šis iškeltas tikslas atitinka konceptualinės pažangos idėją – ieškoti priemonių, leidžiančių surasti svarbius dėsningumus – ir, beje, to siekdamas Galilėjus rėmėsi XIV a. scholastų žodynu šitaip parodydamas jo efektyvumą.

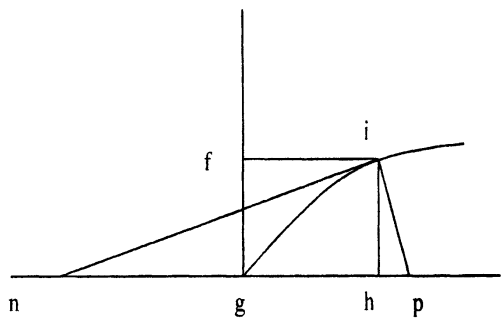
Galilėjus pateikia tokius pat tolygaus ir tolygiai kintančio judėjimo apibrėžimus kaip ir Mertono scholastai. Ir momentinio greičio paaiškinimas atitinka Heytesbury apibrėžimą [9: 197–205]. Vidutinio greičio teoremos įrodyme Galilėjus naudoja oresmiškąjį brėžinį (tik čia laikas – vertikaliai, o greitis – horizontaliai). Jis nekalba apie plotą kaip nueitą kelią: įrodymas grindžiamas tuo, kad trikampis ir stačiakampis yra lygų skaičių greičio momentų turintys agregatai [9: 205]. Pasiremdamas šia teorema, Galilėjus įrodo garsųjį laisvai krintančių kūnų (iš rimties būsenos) dėsningumą: nueitas kelias yra proporcingas laiko kvadratui, t. y. $s_1 : s_2 = t_1^2 : t_2^2$. Vidutinio greičio teoremos vertė ypač atsiskleidžia, kai analizuojama horizontaliai išmesto kūno trajektorija: pasinaudojęs horizontalaus ir vertikalaus judėjimo nepriklausomumu, Galilėjus be infinitezimalinių metodų pagalbos parodo, kad ši trajektorija – tai parabolė [9: 238–240].

5. XVII a. randame daugybę mokslininkų dirbant ties keleta matematinių problemų, kurios nuosekliai vedė prie infinitezimalinių metodų. Tai kreivių maksimumų ar minimumų bei liestinės taške paieškos problemos. Kitas uždavinys – tai nuo Archimedo laikų einantis kreivinių figūrų kvadratūros skaičiavimas ir kreivių rektifikavimas (ištiesinimas). Atvirkštinį liestinių uždavinio ir kvadratūros ryšį – naujojo skaičiavimo pagrindą – geometriniu pavidalu jau žinojo Isaac Barrow. Tačiau aiškios algoritminės procedūros pasirodo Leibnizo ir Newtono darbuose. Toliau dėmesį sutelksime ties Newtono, kuris pirmasis sistemingai pritaikė naujuosius metodus aprašant judėjimą gamtoje, variantu.

Pateikdamas savąją pasaulio sistemą, Newtonas nenagrinėjo kinematinių terminų, nors juos ir vartojo. Rankraščiuose betgi matyti, kaip jis artėjo prie momentinių dydžių idėjos. Kaip jau buvo gana įprasta XVII amžiuje, jis naudojosi kinematiniu požiūriu į kreivių generavimą, t. y. kreivės buvo traktuojamos kaip nubrėžtos tam tikru būdu judančio taško. Tai leido pasinaudoti ir grafinių priemonių teikiamais privalumais. Viename iš rankraščių [13: 81–82] Newtonas, pasiremdamas grafinėmis priemonėmis, sklandžiai pereina nuo tolygaus judėjimo prie greičio taške netolygaus judėjimo atveju. Čia sujungiami geometrinis ir mechaninis būdai, iki šiol naudojami įvedant išvestinės funkcijos idėją. Taigi Newtonas pradeda nuo tolygaus judėjimo, kai per lygų laiką nueinamas lygus atstumas: tokiu atveju stačiajame trikampyje *ab* vaizduoja kelią, nueitą per laiką *eb* (žr. 2 pav.). Konceptualinis žingsnis pirmyn žengiamas, kai jis sukonstruoja momentinį greitį pagal geometrinę analogiją su pastoviu greičiu trikampio įžambinei pereinant į liestinę taške: netolygaus judėjimo atveju turime kreivę (žr. 3 pav.), kur linijos *gf* ar *hi* vaizduoja laiką, *gh* ar *fi* – atstumą, o *ni* yra liestinė taške *i*; tada *nh* ir *hi* santykis yra greitis.



2 pav.



3 pav.

Newtonui taip pat buvo aišku, kad momentiniai dydžiai yra raktas į judėjimo problemų sprendimą. Štai taip „Fliuksijų metode“ Newtonas išskiria dvi (vieną kitai atvirkštinę) netolygaus judėjimo problemas: „I. Esant tolydžiai (ar kiekvienu momentu) duotam kelio ilgiui, rasti judėjimo greitį duotu laiku II. Esant tolydžiai duotam judėjimo greičiui, rasti nubrėžto kelio ilgį duotu laiku“ [15: 45; 3: 210]. Pavyzdžiui, jei nueitas iki tam tikro laiko momento kelias $y = xx$, o x greitis yra $\dot{x}$ (x – taip pat kelias), tai $2x\dot{x}$ yra y yra greitis tuo laiko momentu. Apibendrinant šios problemos pervedamos į fluenčių ir fliuksijų kalbą: pirma, duotas fluenčių sąryšis, rasti fliuksijų sąryšį; duotas fliuksijų sąryšis, rasti fluenčių sąryšį. Fluentės – tai bet kokie kintantys („tekantys") dydžiai, kuriuos generuoja tolydus kitimas (panašiai kaip didėjantis nueitas kelias judėjimo atveju, pabrėžia Newtonas). Fluentės priklauso nuo universalaus kintamojo – laiko, kuris Newtonui yra vienintelis nepriklausomas kintamasis. Fliuksijos (žymimos $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) – tai sparta, su kuria kinta fluentės [15: 45]. Įvesdamas analitines (t. y. negeometrines) šių problemų sprendimo taisykles, Newtonas pateikė keletą pagrindimo būdų [3; 15]. Newtonas čia dirba be fundamentalaus konceptualinio įrankio – ribinio perėjimo – besinaudodamas kinematine intuicija. Pagrindinė idėja yra panaši: į lygtį įvedamas infinitezimalinis (be galo mažas) elementas ir po pertvarkymų nariai, turintys šį elementą, iš viso atmetami.

Be galo maži dydžiai neabejotinai kelia konceptualinių problemų: jei tai nulinis dydis, tai kaip gali ką nors gauti iš jo padauginęs, o jei tai baigtinis nenulinis dydis, kaip tada galima atmesti iš jo padaugintus narius. Kaip tik šios problemos rodo šiuolaikinės ribos idėjos efektyvumą: baigtinių dydžių begalinė seka artėja prie nulio ta prasme, kad sekoje galima rasti tokią vietą, nuo kurios nariai yra kiek norima arti nulio. Newtonas suprato naujojo skaičiavimo problemas: kaip jis pats vėliau rašė bandydamas atsisakyti be galo mažų dydžių, „matematikoje negalima ignoruoti ir pačių mažiausių klaidų" [15: 168]. Rašydamas *Principia*, jis jau vietoje fluksijų metodo dažniausiai naudoja naują variantą, būtent geometrinį infinitezimalinį skaičiavimą. Pastarąjį netrukus nagrinėsime aptardami, kaip Newtonas pasinaudojo savo naujovėmis.

Vėl keliame naujųjų konceptualinių priemonių panaudojimo klausimą: ką gi davė momentinių dydžių įvedimas? Trumpai atsakant, kartu su naujais fizikiniais principais tai įgalino Newtoną pateikti unifikuotą žemės ir dangaus kūnų judėjimo teoriją ir pagrįsti ją dinaminio (jėgos) aspekto matematine analize. Konceptualinių priemonių efektyvumo požiūriu universalios gravitacijos dėsnio istorija yra ypač pamokanti. Tuo metu planetų judėjimo problemą buvo bandoma spręsti dvejopai. Kontinente vyravo požiūris, kad reikia pasitelkti visą erdvę persmelkiantį nematomą fluidą. Tuo tarpu Anglijoje populiaresnė buvo magnetinė filosofija, inspiruota Gilberto ir Keplerio darbų: pagrindinė čia buvo traukos (arba impulso) link jėgos centro samprata, nesiremianti tarpinio fluido idėja. Pastaruoju atveju pasiremiant optine analogija (šviesos intensyvumas yra atvirkščiai proporcingas atstumo kvadratui) arba Keplerio trečiuoju dėsniu buvo teigiama, kad jėga link centro kinta atvirkščiai proporcingai atstumo iki centro kvadratui.

Ką tik įsikūrusioje Londono Karališkojoje draugijoje tokias idėjas svarstė Robert Hook, Christopher Wren ir Edmond Halley. Hookas žengė žingsnį į priekį ir ne tik paskelbė visuotinį traukos veikimą bei suformulavo atvirkštinio proporcingumo atstumo kvadratui dėsnį, bet ir pasiūlė judėjimo analizės programą: kūnai juda tiesiai ir tolygiai, kol išorinė galia neišlenkia jų trajektorijos į kokią nors kreivę [3: 3–7, 146–155; 5: 216]. Bet jiems buvo aišku, kad reikalinga bendra planetų judėjimo teorija, be kurios ir pats visuotinės traukos dėsnis stokojo pagrindo: konkreti problema buvo iš jėgos atvirkštinio proporcingumo atstumo kvadratui dėsnio išvesti planetų judėjimo dėsningumus, pvz., planetų elipsines trajektorijas. Kaip praneša Halley laiške Newtonui [3: 5–6], jis pats nesugebėjo to atlikti, Wrenas metė tokių įrodymų bandymus „neradęs priemonių tai padaryti" ir pasiūlė 40 šilingų knygos prizą Halley'ui ar Hookui, jei šie per 2 mėnesius pristatys įrodymus; Hookas sakėsi galįs tai padaryti, bet taip ir nepristatė įtikinančių įrodymų. Nesėkmės priežastis buvo tai, kad nei vienas iš jų neturėjo sprendimams būtinų infinitezimalinių priemonių. Jas turėjo Newtonas, kuris, Halley paskatintas, 1684 m. Karališkajai draugijai pristatė traktatą *De Motu.* Iš šio traktato išaugo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Kūnų judėjimo tyrimą savo *Principia* Newtonas pradeda parodydamas matematinį įrankį – pirmųjų ir galutinių santykių metodą, kuris įgalina manipuliuoti „atsirandančių" ir „nykstančių" dydžių ribiniais santykiais. Pirmojoje lemoje pateikiamas bendras metodo pagrindimas – perėjimas prie ribos: „Kiekybės ir kiekybių santykiai, kurie bet kokiu baigtiniu laiku pastoviai krypsta į lygybę ir prieš šio laiko pabaigą priartėja vienas prie kito arčiau už bet kokį duotą skirtumą, galiausiai tampa lygūs" [11: 25]. Ši ribos idėja dažniausiai realizuojama geometriniais brėžiniais. Galutinė (t. y. ribinė) brėžinio elementų lygybė leidžia surasti svarbius geometrinius santykius „ištiesinant" kreivės lankus, kai lankas be galo mažėja. Taip galima aproksimuoti kreivines figūras vis mažėjančiais stačiakampiais bei vis mažėjančioje taško aplinkoje vieną kitu pakeisti lanko, stygos ir liestinės elementus. Kaip toliau pabrėžia Newtonas, naudodamasis mažais kreivės elementais, jis turi omenyje ne nedalomuosius elementus, o „nykstančius dalomus dydžius", ne apibrėžtų dalių sumas ir santykius, o „sumų ir santykių ribas" [11: 30].

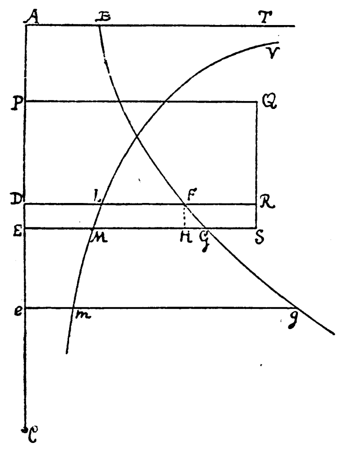
De Gandto taikliu pastebėjimu, *Principia* geometrinę strategiją galima pavadinti „baigtinių liudijimų metodu" [3: 233]. Pagrindinė idėja yra tai, kad ieškant proporcijų tarp nykstančių elementų pasinaudojama baigtinių figūrų proporcijomis: tai pagrindžiama tuo, kad pereinant prie ribos baigtinė ir vis mažėjanti konfiguracija išlaiko proporcingumo santykius. O visos jo naudojamos proporcijos – tai žinomos senosios geometrijos proporcijos.

Dešimtojoje lemoje jau randame ir jėgos geometrinę analizę, kuri iki Newtono buvo menkai teišplėtota. Kaip teigiama lemos išvadose, kai jėga verčia kūną nueiti tam tikrą kelią, tai infinitezimaliniu atveju šis kelias yra proporcingas jėgai ir laiko kvadratui. Taigi imant pakankamai mažą laiko intervalą jėgą galima laikyti pastovia, t. y. veikiančia infinitezimaliniais impulsais bei nekeičiančia krypties. Svarbiu įcentrinės jėgos atveju jėgos poveikis taške yra įvertinamas geometriškai – nukrypimu nuo tiesaus kelio, kuriuo kūnas judėtų liestine, jei nebūtų jėgos poveikio, t. y. atkarpa, kuri jungia liestinę ir realią trajektoriją, jėgos šaltinio kryptimi: trajektorijos lankui be galo artėjant į nulį, šis nukrypimas išlaiko vienodą kryptį ir yra proporcingas laiko kvadratui. Pasinaudodamas šiuo dinaminiu aspektu, geometriniu perėjimu prie ribos bei jau nuo Apollonijaus laikų žinomomis kūginių pjūvių savybėmis, Newtonas parodė, jog elipse judantį kūną veikia jėga, atvirkščiai proporcinga atstumo kvadratui.

Geometriniu požiūriu yra sunkesnis uždavinys, kaip surasti trajektoriją, kai duota bet kokia jėgos priklausomybė nuo atstumo. Čia jau nebėra duotas geometrinis objektas – trajektorijos kreivės. Bendruoju atveju šią problemą Newtonas sprendžia naujomis priemonėmis, labiau primenančiomis vėlesnės mechanikos analitinį-algebrinį infinitezimalinį skaičiavimą. *Principia* teiginiuose XXXIX – XLII sukuriama skaičiavimo procedūra, kaip taškas po taško konstruoti trajektoriją, kai duota bet kokia įcentrinė jėga, priklausanti nuo atstumo iki centro. Paprastumo dėlei paimkime teiginį XXXIX, kuriame nagrinėjamas tolesnėms teoremoms svarbus tiesiaeigio judėjimo atvejis. Šios teoremos pirmojoje dalyje suformuluojamas dėsnis, kuris vėliau tapo fundamentalia energijos-darbo lygčių dalimi: kai dėl jėgos F poveikio iš rimties būsenos krentantis kūnas pasiekia greitį v, tai v^2 yra proporcingas $\int F(x)dx$ (šiuolaikiniu integralo ženklu žymėsiu tai, ką Newtonas vadina „kreiviniu plotu“, be to, kartais vietoje žodžio „proporcingas“ vartosiu simbolį „~“).

Taigi Newtonas šiame uždavinyje [11: 86–87] ieško, kokį greitį dėl įcentrinės jėgos poveikio pasieks kūnas bet kuriame taške ir kiek laiko jis užtruks pasiekdamas bet kurį tašką (darant prielaidą dėl kreivių kvadratūros galimumo). Jau pats teoremą lydintis paveikslėlis (4 pav.) – „ymaginatio“, Oresme'as pasakytų – rodo vaisingą naujovę: judėjimas reprezentuojamas ne trajektorine kreive, o abstraktesniu būdu, t. y. būdu, kuris nesinaudoja vizualiniu panašumu į tiriamąjį objektą – judėjimą. Štai naujosios reprezentacijos prasmė, t. y. taisyklės, valdančios brėžinio panaudojimą (aptarsiu tik kai kuriuos jo elementus): jėga verčia kūną kristi iš *A* į *C*; kiekvienam kelio *AC* taškui priskiriama statmena atkarpa, proporcinga jėgos stiprumui tame taške. Taigi kreivė *BFG* – tai jėgos funkcinės priklausomybės nuo atstumo pavaizdavimas (grafikas).

Newtono argumentacijos būdas primena fliuksijų metodą su aiškesniais ribinio perėjimo elementais. Jis remiasi judėjimo savybėmis labai mažoje (linea quam minima) kelio atkarpoje DE, t. y. taško E lokalinėje aplinkoje. Įvedami ir brėžinyje neatsispindintys elementai greitis V taške D ir greičio prieaugis I, kurį įgyja kūnas judėdamas nuo D iki E (vėlesne diferencialų kalba DE būtų dx, o I – dv).



4 pav.

Infinitezimalinė kelio atkarpa DE leidžia traktuoti greitį šioje atkarpoje kaip pastovų, o kreivinę figūrą DFGE laikyti stačiakampiu. Be to, Newtonas pasinaudoja fundamentalia visai tolimesnei fizikos raidai įcentrinės jėgos savybe: „jėga yra tiesiogiai kaip greičio prieaugis I ir atvirkščiai kaip laikas“ [11: 87], t. y. šiuolaikiniais terminais $F \sim dv/dt$. Šis konceptualinis žingsnis – infinitezimalinis jėgos įvertinimas – vėliau tapo visos mechanikos pagrindu. Tuo pasiremdamas, Newtonas parodo, kad „jėga yra ... kaip $I \cdot V/DE$“ [11: 87], t. y. $F \sim v \cdot dv/dx$. Taigi pasiekėme tokį mokslo istorijos etapą, kuriame jau turime diferencialines lygtis. O pastaroji lygtis yra lygiavertė šiai integralinei lygčiai: „jėga, proporcinga DF ir DG, vers kūną kristi greičiu, kuris yra kaip atkarpa, kurios kvadratas lygus plotui ABGE“ [11: 87], t. y. $v \sim \sqrt{\int ABGE}$ arba $v^2 \sim \int F(x)dx$.

6. Tuo metu kontinente plito naujas infinitezimalinio skaičiavimo variantas – Leibnizo diferencialų ir integralų skaičiavimas. Leibnizą labiau skatino for-

malūs matematiniai motyvai, kuriais remdamasis jis nustatė iki šiol naudojamas efektyvias algoritmines taisykles. Čia infinitezimaliniu elementu yra diferencialai arba skirtumai dy ar dx kaip dydžių y ar x be galo maži prieaugiai. Tiesa, pirmajame spausdintame naujojo skaičiavimo darbe (1684 m.) Leibnizas diferencialą apibrėžia per baigtinę geometrinių dydžių proporciją: fiksavus bet kokią atkarpą dx, diferencialu dy vadinama atkarpa, kurios santykis su dx yra toks, kaip y (ordinatė taške) santykis su XD (subtangentu), t. y. pagal dy apibrėžimą galioja dy : : dx = Y : XD [16: 110–111]. Tačiau šis apibrėžimas tik formaliai leido išvengti infinitezimalinių elementų: juk faktiškai šis skaičiavimas yra apie lokalines kintamųjų dydžių savybes, ir todėl Leibnizas bei jo pasekėjai, neturėdami ribos idėjos, ir toliau kalbėjo apie be galo mažus diferencialus. Antai pirmajame diferencialinio skaičiavimo vadovėlyje, kurį parašė L'Hopitalis su Johanno Bernoullio pagalba, diferencialas apibrėžiamas taip: „Be galo maža dalis, kuria padidėja ar sumažėja kintamas dydis, vadinamas jo diferencialu“ [16: 127–130].

Broliai Bernoulliai, Varignonas, Euleris ir vėlesni matematikai bei fizikai Leibnizo analitinį aparatą plačiai pritaikė judėjimo problemoms spręsti. Netrukus ir paties Newtono *Principia* idėjos buvo pervestos iš geometrinės į diferencialų kalbą, kuria suformuluotomis analitinėmis taisyklėmis buvo daug lengviau operuoti. Ši kalba ir liko pagrindine gamtotyros kalba tiriant netolygų judėjimą. Diferencialų transformacijų efektyvumą jau aiškiai liudija Varignono traktatas, 1700 m. pristatytas Mokslų akademijai. Varignonas nustato momentinio greičio ir momentinės jėgos taisykles tiesiaeigio judėjimo atveju: „1. $v = dx/dt$ 2. $y = dv/dt$ (= ddx/dt)“ [3: 254]; čia v – greitis, x – kelias, y – jėga. Remdamasis šiomis taisyklėmis, „vienu ypu“, kaip jis pats sako, galima gauti Newtono teiginio XXXIX pirmąją dalį: $dt = dx/v$, $dt = dv/y$, taigi $dx/v = dv/y$ arba $ydx = vdv$, tad iš karto turime $\int ydx = 1/2v^2$. Tai pažanga bent jau transformacinių taisyklių požiūriu, nors infinitezimalinio skaičiavimo idėja ir lieka ta pati. Šiek tiek vėliau Euleris, pereidamas nuo $v = s/t$ prie $v = ds/dt$, pastarąją aiškiai išsakė: „bet kokio judėjimo atveju, koks netolygus jis bebūtų, galima laikyti, jog smulkiausi kelio elementai praeinami kaip ir judant tolygiai“ [12: 107].

7. Apžvelgėme ryškų konceptualinės pažangos atvejį mokslo istorijoje – infinitezimalinio skaičiavimo, leidžiančio operuoti momentiniais dydžiais, panaudojimą. Naujųjų amžių mokslo revoliucijos pradinėje stadijoje šis skaičiavimas ypač skatino mechanikos ir per pastarąją visos gamtotyros raidą. Nepaisant pokyčių gamtos moksle, tai tebėra nepamainomas įrankis. Kaip teigė Einsteinas, pats reformavęs Newtono mechaniką, „aiški diferencialinio dėsnio samprata yra vienas iš didžiausių Newtono intelektualinių pasiekimų“ [6: 255], tuo pabrėždamas klasikinės ir naujosios fizikos tęstinumą šių konceptualinių priemonių požiūriu. Šis atvejis taip pat rodo, kaip svarbu turėti efektyvias konceptualines priemones: nuo mažumės visi esame susipažinę su netolygiu judėjimu (kitimu), bet jame reikšmingiems dėsningumams išskirti kasdieninės kalbos jau nepakanka – reikalingos netrivialios matematinės priemonės. Taigi tai tokios priemonės, kurių atžvilgiu tinka šis vaizdingas Feynmano posakis: „gamtos reiškiniuose yra ritmas ir forma (pattern), kuris yra neaiškus [tiesioginio stebėjimo] akiai, o atviras tik analizės akiai“ [8: 13].

Gauta
2002 05 03

Literatūra

1. Archimedes. On Spirals. R. M. Hutchins (ed.). *Great Books of the Western World.* Chicago: Encyclopedia Britannica, Inc., 1955. Vol. 11.
2. Clagett M. *The Science of Mechanics in the Middle Ages.* Madison: The University of Wisconsin Press, 1961.
3. De Gandt F. *Force and Geometry in Newton's Principia.* Princeton: Princeton University Press, 1995.
4. Dijksterhuis E. J. *The Mechanization of the World Picture.* Oxford: Oxford University Press, 1969.
5. Dugas R. *A History of Mechanics.* New York: Dover Publications, Inc., 1988
6. Einstein A. *Ideas and Opinions.* New York: Crown Publishers, Inc., 1956.
7. Feynman R. P. *The Feynman Lectures on Physics. Mainly Mechanics, Radiation, and Heat.* Reading, Mass.: Addison-Wesley. 1964.
8. Feynman R. P. *The Character of Physical Law.* Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, 1967.
9. Galileo G. Dialogues Concerning the Two New Sciences. R. M. Hutchins (ed.). *Great Books of the Western World.* Chicago: Encyclopedia Britannica, Inc., 1955. Vol. 28.
10. Kliksas F. *Bundantis mąstymas.* Vilnius: Mintis, 1988.
11. Newton I. Mathematical Principles of Natural Philosophy. Tr. by A. Motte, R. M. Hutchins (ed.). *Great Books of the Western World.* Chicago: Encyclopedia Britannica, Inc., 1955. Vol. 34.
12. Гернет М. М. К истории становления основных понятий кинематики точки, *Исследования по истории механики.* Москва: Наука, 1981. С. 105–114.
13. Кульвецас Л. Л. О попытках Исаака определить понятие скорости // Kulviecas L. *Klasikinė mechanika.* Vilnius: Vilniaus pedagoginis universitetas, 2001. P. 78–83.
14. Лефевр В. А. От психофизики к моделированию души. *Вопросы философии.* 1990. № 7. С. 25–31.
15. Ньютон И. *Математические работы,* пер. и ком. Д. Д. Мордухай-Болтовского. Москва: Объединенное научно-техническое изд-во НКТП СССР, 1937.
16. Юшкевич Ф. П. (ред.) *Хрестоматия по истории математики. Математический анализ.* Москва: Просвещение, 1977.

Edmundas Adomonis

CONCEPTUAL PROGRESS IN SCIENCE: THE USE OF INSTANTANEOUS QUANTITIES IN NATURAL SCIENCE

S u m m a r y

This paper offers an analysis of a distinct case of conceptual progress in science, namely the introduction of instantaneous quantities into the description of non-uniform motion and the means of dealing with the quantities – infinitesimal calculus. The fruitfulness of the conceptual step is investigated and several important historical episodes leading to the formation of the new calculus are examined, with the main focus on the relevant ideas of scholars at Merton College in the 14th century and on the Newton's works where he systematically applied the new calculus. Besides, a special emphasis is put on the efficiency of pictorial means of representation.